

APÉNDICE M

M. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CIRCULARES Y CIRCULARES POR BLOQUES

Considerando el modelo de degradación $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n}$, definido en la ecuación (20.29), en este apéndice se muestra que las soluciones que son computacionalmente posibles pueden obtenerse a partir de dicho modelo diagonalizando la matriz \mathbf{H} . Con el fin de simplificar la explicación comenzamos la discusión considerando matrices circulares y luego extendemos el procedimiento a matrices circulares por bloques, para analizar finalmente el efecto de la diagonalización en el modelo de degradación.

M.1 MATRICES CIRCULARES

Consideremos la matriz dada en (20.25), y definamos una función escalar $\lambda(k)$ y un vector $\mathbf{w}(k)$ como,

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & h_e(0) + h_e(M-1) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} k\right] + h_e(M-2) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} 2k\right] + \dots \\ & + h_e(1) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} (M-1)k\right] \end{aligned} \quad (\text{M.1})$$

donde j es la unidad imaginaria y

$$\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} k\right] \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} 2k\right] \\ \vdots \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} (M-1)k\right] \end{bmatrix} \quad (\text{M.2})$$

para $k=0,1,2,\dots,M-1$. Por multiplicación de matrices se llega a,

$$\mathbf{H}\mathbf{w}(k) = \lambda(k)\mathbf{w}(k) \quad (\text{M.3})$$

esta expresión indica que $\mathbf{w}(k)$ es un autovector de la matriz circular \mathbf{H} y que $\lambda(k)$ es su correspondiente autovector.

Formemos una matriz \mathbf{W} de dimensión $M \times M$ con los M autovectores de \mathbf{H} como columnas:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}(0) \ \mathbf{w}(1) \ \mathbf{w}(2) \ \dots \ \mathbf{w}(M-1)] \quad (\text{M.4})$$

el k -ésimo elemento de \mathbf{W} , escrito como $W(k,i)$, está dado por

$$W(k,i) = \exp\left[j \frac{2\pi}{M} ki\right] \quad (\text{M.5})$$

para $k, i = 0,1,2,\dots,M-1$. Las propiedades de ortogonalidad de las exponenciales complejas permiten la escritura de la matriz inversa \mathbf{W}^{-1} ; su k -ésimo elemento, simbolizado como $W^{-1}(k,i)$, es

$$W^{-1}(k,i) = \frac{1}{M} \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} ki\right] \quad (\text{M.6})$$

A partir de (M.5) y (M.6),

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (\text{M.7})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión $M \times M$.

La importancia de la existencia de la matriz inversa \mathbf{W}^{-1} es que garantiza que las columnas de \mathbf{W} (los autovectores de \mathbf{H}) son *linealmente independientes*.

A partir de la teoría elemental de matrices (Golub y Loan 1983), \mathbf{H} puede expresarse de la forma,

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{D} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{W} \quad (\text{M.8})$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal cuyos elementos $D(k,k)$ son los autovalores de \mathbf{H} ; esto es,

$$D(k,k) = \lambda(k) \quad (\text{M.9})$$

La ecuación (M.9) indica que \mathbf{H} es diagonalizada en el orden indicado obteniéndose \mathbf{D} .

M.2 MATRICES CIRCULARES POR BLOQUES

La matriz de transformación para la diagonalización de matices circulares por bloques se construye como sigue. Sea

$$w_M(i,m) = \exp\left[j \frac{2\pi}{M} im\right] \quad \text{y} \quad w_N(k,n) = \exp\left[j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (\text{M.10})$$

basándonos en esta notación, definimos una matriz \mathbf{W} de dimensión $MN \times MN$, y conteniendo M^2 particiones de dimensión $N \times N$. La im -ésima partición de \mathbf{W} es,

$$\mathbf{W}(i,m) = w_M(i,m)\mathbf{W}_N \quad (\text{M.11})$$

para $i,m = 0,1,2,\dots,M-1$. Entonces \mathbf{W}_N es una matriz de $N \times N$ con elementos,

$$W_N(k,n) = w_N(k,n) \quad (\text{M.12})$$

para $k,n = 0,1,2,\dots,N-1$.

La matriz inversa \mathbf{W}^{-1} es también de dimensión $MN \times MN$ con M^2 particiones de dimensión $N \times N$. La im -ésima partición de \mathbf{W}^{-1} simbolizada como $\mathbf{W}^{-1}(i,m)$ es,

$$\mathbf{W}^{-1}(i,m) = \frac{1}{M} w_M^{-1}(i,m)\mathbf{W}_N^{-1} \quad (\text{M.13})$$

donde $w_M^{-1}(i,m)$ es

$$w_M^{-1}(i, m) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} im\right] \quad (\text{M.14})$$

para $i, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$. La matriz \mathbf{W}_N^{-1} tiene elementos

$$W_N^{-1}(k, n) = \frac{1}{N} w_N^{-1}(k, n) \quad (\text{M.15})$$

donde

$$w_N^{-1}(k, n) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (\text{M.16})$$

para $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Se puede comprobar por sustitución directa de los elementos de \mathbf{W} y \mathbf{W}^{-1} que

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (\text{M.17})$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensión $MN \times MN$.

A partir de los resultados de la sección anterior y teniendo en cuenta que \mathbf{H} es una matriz circular por bloques se puede demostrar (Hunt 1973) que

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{D} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{W} \quad (\text{M.18})$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal cuyos elementos $D(k, k)$ están relacionados con la transformada discreta de Fourier de la función extendida $h_e(x, y)$. Además la transpuesta de \mathbf{H} , expresada como \mathbf{H}^T es

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{W}\mathbf{D}^*\mathbf{W}^{-1} \quad (\text{M.19})$$

donde \mathbf{D}^* es la compleja conjugada de \mathbf{D} .

M.3 EFECTOS DE LA DIAGONALIZACIÓN EN EL MODELO DE DEGRADACIÓN

La matriz \mathbf{H} en el modelo discreto 1-D $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ es circular, por tanto puede expresarse en la forma de la ecuación (M.8), por lo que

$$\mathbf{g} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{W}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} \quad (\text{M.20})$$

El producto $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$ es un vector columna M -dimensional. A partir de la ecuación (M.6) y la definición de \mathbf{f} en la sección 20.2.4, el k -ésimo elemento del producto $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$, denotado $F(k)$, es

$$F(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_e(i) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} ki\right] \quad (\text{M.21})$$

para $k=0,1,2,\dots,M-1$. Esta expresión es la transformada discreta de Fourier de la secuencia extendida $f_e(x)$. En otras palabras, el producto $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$ da un vector cuyos elementos son la transformada de Fourier de los elementos de \mathbf{f} . Análogamente, $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}$ proporciona la transformada de Fourier de los elementos de \mathbf{g} , denominados $G(k)$, con $k=0,1,2,\dots,M-1$.

Ahora examinemos la matriz \mathbf{D} en la ecuación (M.20). La discusión en la sección M.1 mostró que los elementos de la diagonal principal de \mathbf{D} son los autovalores de la matriz circular \mathbf{H} . Los autovalores aparecen en la ecuación (M.1), que utilizando el hecho de que

$$\exp\left[j \frac{2\pi}{M} (M-i)k\right] = \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} ik\right] \quad (\text{M.22})$$

pueden escribirse de la forma,

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & h_e(0) + h_e(1) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} k\right] + h_e(2) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} 2k\right] + \dots \\ & + h_e(M-1) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} (M-1)k\right] \end{aligned} \quad (\text{M.23})$$

A partir de (M.9) y (M.23),

$$D(k, k) = \lambda(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_e(i) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} ki\right] \quad (\text{M.24})$$

para $k=0,1,2,\dots,M-1$. El lado derecho de esta ecuación es $MH(k)$, donde $H(k)$ es la transformada discreta de Fourier de la secuencia extendida $h_e(x)$.

Por tanto,

$$D(k, k) = MH(k) \quad (\text{M.25})$$

Estas transformadas pueden combinarse en un resultado. Puesto que \mathbf{D} es una matriz diagonal, el producto de \mathbf{D} con cualquier vector multiplica cada elemento de ese vector por un elemento diagonal de \mathbf{D} . Consecuentemente, la formulación dada en (M.20) puede reducirse a un producto término a término de las secuencias de la transformada de Fourier 1-D, en otras palabras,

$$G(k) = MH(k)F(k) \quad (\text{M.26})$$

para $k=0,1,2,\dots,M-1$, donde $G(k)$ son los elementos del vector $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}$ y $MH(k)F(k)$ los elementos de $\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$. El lado derecho de (M.26) es la convolución de $f_e(x)$ y $h_e(x)$ en el dominio de la frecuencia. Computacionalmente hablando este resultado implica una considerable simplificación porque $G(k)$, $H(k)$ y $F(k)$ son transformadas discretas con M muestras, que pueden ser obtenidas utilizando la transformada rápida de Fourier.

Un procedimiento similar al desarrollo precedente, proporciona resultados equivalentes para el modelo de degradación 2-D. Multiplicando ambos lados de la ecuación (20.29) por \mathbf{W}^{-1} y utilizando las ecuaciones (M.17) y (M.18) se obtiene,

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{n} \quad (\text{M.27})$$

donde \mathbf{W}^{-1} es una matriz de dimensiones $MN \times MN$ cuyos elementos están dados en (M.13), y \mathbf{f} y \mathbf{g} son vectores de dimensión MN formados apilando las filas de las imágenes extendidas $f_e(x)$ y $g_e(x)$ respectivamente.

El lado derecho de la ecuación (M.27) es un vector de dimensión $MN \times 1$. Sean sus elementos $G(0,0)$, $G(0,1)$, ..., $G(0,N-1)$; $G(1,0)$, $G(1,1)$, ..., $G(1,N-1)$; ...; $G(M-1,0)$, $G(M-1,1)$, ..., $G(M-1,N-1)$. Se puede demostrar (Hunt 1973) que,

$$G(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} g_e(x,y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad (\text{M.28})$$

para $u = 0,1,2,\dots,M-1$, y $v = 0,1,2,\dots,N-1$. La ecuación (M.28) es la transformada 2-D de Fourier de $g_e(x,y)$. En otras palabras, los elementos de $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}$ corresponden a las filas apiladas de la matriz transformada de Fourier con elementos $G(u,v)$ para $u = 0,1,2,\dots,M-1$, y $v = 0,1,2,\dots,N-1$. Análogamente, los vectores $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}$ y $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{n}$ son MN -dimensionales y contienen los elementos $F(u,v)$ y $N(u,v)$, donde

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_e(x,y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad (\text{M.29})$$

y

$$N(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta_e(x, y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad (\text{M.30})$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, y $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Finalmente, los elementos de la matriz diagonal \mathbf{D} están relacionados con la transformada de Fourier de la función respuesta impulso extendida $h_e(x, y)$; esto es

$$H(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} h_e(x, y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad (\text{M.31})$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, y $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Los MN elementos diagonales de \mathbf{D} están formados como sigue. Los primeros N elementos son $H(0,0)$, $H(0,1)$, ..., $H(0,N-1)$; el siguiente, $H(1,0)$, $H(1,1)$, ..., $H(1,N-1)$; y así sucesivamente, con los últimos N elementos definidos como $H(M-1,0)$, $H(M-1,1)$, ..., $H(M-1,N-1)$. Los elementos fuera de la diagonal son cero obviamente. La matriz completa formada a partir de los elementos precedentes se multiplica por MN para obtener \mathbf{D} . Una vía más precisa de expresar esta construcción es la siguiente,

$$D(k, i) = \begin{cases} MNH\left(\left[\frac{k}{N}\right], k \bmod N\right) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (\text{M.32})$$

donde $[c]$ se usa para indicar el mayor entero que no supera a c , y $k \bmod N$ es el resto obtenido dividiendo k por N .

Las ecuaciones (M.28) a (M.31) pueden utilizarse para mostrar que los elementos individuales de (M.27) están relacionados por la expresión,

$$G(u, v) = MNH(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (\text{M.33})$$

para $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, y $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

El término MN es simplemente un factor de escala que a efectos notacionales puede ser absorbido convenientemente en $H(u, v)$ desapareciendo por tanto, de las ecuaciones (M.32) y (M.33), con $H(u, v)$ escalado por MN .